

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
/ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 13 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό σελ. 152.
A2. Σχολικό σελ. 16.
A3. Σχολικό σελ. 73.
A4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Για την $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ έχουμε $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.

B1. Αφού $A(2,5) \in C$, $\Leftrightarrow f(2) = 5 \Leftrightarrow 8a + 4b + 1 = 5 \Leftrightarrow 8a + 4b = 4 \Leftrightarrow 2a + b = 1$ (1)

Αφού η εφαπτομένη στο A έχει συντελεστή διεύθυνσης 12 πρέπει:

$$f'(2) = 12 \Leftrightarrow 12a + 4b = 12 \Leftrightarrow 3a + b = 3 \quad (2)$$

Από την (1) και (2) προκύπτουν: $a = 2$ και $b = -3$.

Έτσι έχουμε $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ και $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

B2. Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \kappa$ η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης τότε:

- $\lambda = f'(-1) = 12$
- $B(-1, f(-1)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow B(-1, -4) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -4 = -\lambda + \kappa \Leftrightarrow -4 = -12 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 8$

Άρα $(\varepsilon): y = 12x + 8$.

B3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 6x \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$	\circ	$+$
f	\nearrow		\searrow		\nearrow

- Για $x \in (-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Για $x \in [0, 1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Για $x \in [1, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Στο $x_1 = 0$ η f έχει τ. μέγιστο το $f(0) = 1$.
- Στο $x_2 = 1$ η f έχει τ. ελάχιστο το $f(1) = 0$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και $2013 < 2014 \Leftrightarrow f(2013) < f(2014)$.

B4. Έχω $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ άρα $f'(x) = 6x^2 - 6x$ και $f''(x) = 12x - 6$

Η εφαπτομένη της C_f παράλληλη του xx' \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow f'(k) = 0 \Leftrightarrow 6k^2 - 6k = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow k = 0 \text{ ή } k = 1 \text{ αλλά } k \in \Omega \text{ άρα το } A = \{0, 1\}$$

Η εφαπτομένη της C_f έχει κλίση θετική $\Leftrightarrow f''(\lambda) > 0 \Leftrightarrow 12\lambda - 6 > 0 \Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{2}$,

$$\lambda \in \Omega.$$

$$\text{άρα } B = \{1, 2, 3\}$$

$$N(\Omega) = 7, P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{7} \text{ και } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{7}$$

Το ενδεχόμενο Γ : “Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από A και B ” τότε

$$\Gamma = (A \cup B)'$$

$$\text{Το } A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} \text{ άρα } (A \cup B)' = \{-4, -2, -1\} \text{ άρα } P(A \cup B)' = \frac{3}{7}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α)

Χρόνια Εργασίας	x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$x_i v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
4 - 8	6	8	0,2	8	0,2	48	288
8 - 12	10	16	0,4	24	0,6	160	64
12 - 16	14	4	0,1	28	0,7	56	16
16 - 20	18	12	0,3	40	1	216	432
ΣΥΝΟΛΟ		$v = 40$	1			480	800

β) Έστω το ενδεχόμενο Γ: «Υπάλληλος με 11 τουλάχιστον χρόνια εργασίας στο εργοστάσιο Α» Θεωρώντας ότι οι τιμές σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα καταναμημένες έχουμε:

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 16 + 4 + 12}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

γ) $\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{480}{40} = 12$

$$S_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} = \frac{800}{40} = 20$$

Γ2. α) Στο εργοστάσιο της πόλης Β εργάζονται: $v_B = v - v_A = 200 - 40 = 160$ υπάλληλοι. Θεωρώντας y_i με $i = 1, 2, \dots, 160$ τα έτη εργασίας του καθενός από αυτούς στο εργοστάσιο της πόλης Β έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{x} = 13,6 &\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{40} x_i + \sum_{i=1}^{160} y_i}{200} = 13,6 \Leftrightarrow \frac{40 \cdot \bar{x}_A + 160 \cdot \bar{x}_B}{200} = 13,6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 40 \cdot 12 + 160 \cdot \bar{x}_B = 2720 \Leftrightarrow 160 \cdot \bar{x}_B = 2240 \Leftrightarrow \bar{x}_B = 14 \end{aligned}$$

β) Οι 4 υπάλληλοι αποτελούν το: $\frac{4}{160} \cdot 100\% = 2,5\%$ των εργαζομένων στο εργοστάσιο της πόλης Β. Λόγω της κανονικής κατανομής ξέρουμε ότι τουλάχιστον $\bar{x}_B + 2S_B$ αποτελεί το 2,5% των εργαζομένων. Άρα $\bar{x}_B + 2S_B = 22 \Leftrightarrow 14 + 2S_B = 22 \Leftrightarrow S_B = 4$.

Γ3. α) $CV_A = \frac{S_A}{x_A} = \frac{\sqrt{20}}{12} = \frac{2\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

$$CV_B = \frac{S_B}{x_B} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

Ισχύει $CV_A > CV_B$.

$$\left(\text{Αφού: } \frac{\sqrt{5}}{6} > \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{5}{36} > \frac{4}{49} \Leftrightarrow \frac{245}{1764} > \frac{114}{1764} \right)$$

Άρα στο εργοστάσιο της Β πόλης έχουμε μεγαλύτερη ομοιογένεια, ως προς το χρόνο εργασίας.

- β) Στο εργοστάσιο της πόλης Α θα απολυθούν: $4+12=16$ υπάλληλοι.
Ο νέος πίνακας συχνοτήτων στο τέλος της επόμενης τετραετίας θα είναι:

Χρόνια Εργασίας	x_i	v_i	$x_i v_i$
0 - 4	2	16	32
4 - 8	6	0	0
8 - 12	10	8	80
12 - 16	14	16	224
ΣΥΝΟΛΟ		$v = 40$	336

Ο νέος μέσος χρόνος εργασίας των υπαλλήλων της πόλης Α είναι:

$$\bar{x}'_A = \frac{\sum_{i=1}^{40} x_i v_i}{40} = \frac{336}{40} = 8,4$$

Στο εργοστάσιο της πόλης Β, αφού δεν έχουμε αλλαγές στο εργατικό δυναμικό, στο τέλος της τετραετίας ο νέος μέσος χρόνος εργασίας είναι:

$$\bar{x}'_B = \bar{x}_B + 4 = 14 + 4 = 18 \text{ (χρήση εφαρμογής σχολικού).}$$

Άρα ο ολικός νέος μέσος χρόνος εργασίας των υπαλλήλων της εταιρείας θα είναι:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \frac{\sum_{i=1}^{40} x'_i + \sum_{i=1}^{160} y'_i}{200} = \frac{v_A \cdot \bar{x}'_A + v_B \cdot \bar{x}'_B}{200} = \frac{40 \cdot 8,4 + 160 \cdot 18}{200} = \frac{336 + 2880}{200} = \\ &= \frac{3216}{200} = 16,08 \text{ έτη.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Ισχύει: $2P(-1) = 2P(0) = 2P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \kappa$.

Άρα $P(-1) = P(0) = P(1) = \frac{\kappa}{2}$ και $P(2) = P(3) = P(4) = \kappa$.

Δ1. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (1).$$

$$\bullet \quad f(0) = -a^2 - 6a \quad (2)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax^2+2x} - 3x^2 + 2x + 8) = 1 + 8 = 9 \quad (3)$$

Έτσι από (1), (2), (3) έχουμε:

$$-a^2 - 6a = 9 \Leftrightarrow a^2 + 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow (a + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -3$$

Δ2. Αφού $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} + \kappa + \kappa + \kappa = 1 \Leftrightarrow \frac{3\kappa}{2} + 3\kappa = 1 \Leftrightarrow \frac{9\kappa}{2} = 1 \Leftrightarrow \kappa = \frac{2}{9}.$$

$$\text{Άρα: } P(-1) = P(0) = P(1) = \frac{1}{9} \text{ και } P(2) = P(3) = P(4) = \frac{2}{9}.$$

Δ3. α) Για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-3x^2+2x} - 3x^2 + 2x + 8)' = e^{-3x^2+2x} \cdot (-3x^2 + 2x)' - 6x + 2 = \\ &= (-6x + 2) \cdot e^{-3x^2+2x} - 6x + 2 = (-6x + 2) \cdot (e^{-3x^2+2x} + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{f'(x)}{-6x + 2} - e^x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{(-6x + 2) \cdot (e^{-3x^2+2x} + 1)}{-6x + 2} - e^x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (e^{-3x^2+2x} + 1 - e^x) = e^{\frac{1}{3}} + 1 - e^{\frac{1}{3}} = 1.$$

Έτσι: $B = \{0, 1, -2y + 4\}$. Αφού: $A = \{1, y^2 - 4y + 5, 4\}$ και $A \cap B = \{1, 2\}$,

πρέπει το 2 να περιέχεται και στα δύο σύνολα.

Έτσι πρέπει: $-2y + 4 = 2$ (1) και $y^2 - 4y + 5 = 2$ (2)

Από (1): $-2y = -2 \Leftrightarrow y = 1$ και (2): $y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = 3.$

Άρα πρέπει $y = 1$.

β) Για $y=1$ τα σύνολα γίνονται: $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, 2\}$.

$$\text{Έτσι: } P(A) = P(1) + P(2) + P(4) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$P(B) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Αφού: } A \cup B = \{0, 1, 2, 4\} \text{ έχουμε } P(A \cup B) = P(0) + P(1) + P(2) + P(4) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Αφού: } A - B = \{4\} \text{ έχουμε } P(A - B) = P(4) = \frac{2}{9}.$$

Δ4. α) Έχουμε $g'(x) = 2x + 1 - e$

Έστω $(\varepsilon): y = ax + \beta$ η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $\Delta(x_0, g(x_0))$. Τότε ισχύουν:

$$\bullet \text{ Αφού } \varepsilon // \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta \Leftrightarrow a = 3 - e \quad (1).$$

$$\bullet g'(x_0) = a \Leftrightarrow 2x_0 + 1 - e = a \Leftrightarrow 2x_0 + 1 - e = 3 - e \Leftrightarrow 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

$$\bullet \Delta \in (\varepsilon) \Leftrightarrow g(1) = (3 - e) \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 1 + 1 - e - e = 3 - e + \beta \Leftrightarrow 2 - 2e = 3 - e + \beta \Leftrightarrow \beta = -1 - e \quad (2)$$

Έτσι χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1), (2) έχουμε για εφαπτομένη την $(\varepsilon): y = (3 - e)x - 1 - e$.

β) Έχουμε $E = \left\{ \frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3} \right\}$.

Για τα σημεία $M_\nu(x_\nu, y_\nu)$, με $\nu = 1, 2, 3$ της εφαπτομένης (ε) έχουμε:

$$\bullet M_1\left(\frac{5}{9}, \frac{6}{9} - \frac{14e}{9}\right), \text{ αφού } y_1 = (3 - e) \cdot \frac{5}{9} - 1 - e = \frac{15}{9} - \frac{5e}{9} - 1 - e = \frac{6}{9} - \frac{14e}{9}.$$

$$\bullet M_2\left(\frac{2}{9}, \frac{-3}{9} - \frac{11e}{9}\right), \text{ αφού } y_2 = (3 - e) \cdot \frac{2}{9} - 1 - e = \frac{6}{9} - \frac{2e}{9} - 1 - e = \frac{-3}{9} - \frac{11e}{9}.$$

$$\bullet M_3\left(\frac{2}{3}, 1 - \frac{5}{3}e\right), \text{ αφού } y_3 = (3 - e) \cdot \frac{2}{3} - 1 - e = 2 - \frac{2}{3}e - 1 - e = 1 - \frac{5}{3}e.$$

$$\text{Άρα } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{\frac{6}{9} - \frac{14e}{9} - \frac{3}{9} - \frac{11e}{9} + 1 - \frac{5e}{3}}{3} = \frac{\frac{12}{9} - \frac{40e}{9}}{3} = \frac{12 - 40e}{27}.$$