

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F . Τη σταθερή διαφορά $F(\beta) - F(\alpha)$ ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β και το συμβολίζουμε με:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha).$$

A2. 1 \rightarrow Λ, 2 \rightarrow Σ, 3 \rightarrow Λ, 4 \rightarrow Λ, 5 \rightarrow Σ.

A3. 1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, και $v =$ ακέραιος, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \ell^v$.

2. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

3. $c =$ πραγματικός αριθμός, $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$.

4. Αν σε ένα διάστημα (α, β) που περιέχει ένα x_0 , και ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$, τότε η f έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

5. Η παράγουσα της $\frac{g'(x)}{g(x)}$, όπου $g(x) > 0$, είναι η $\ln[g(x)] + c$.

ΘΕΜΑ Β

Αριθμός βιβλίων x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	$x_i \cdot v_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$v_i (\bar{x} - x_i)^2$
0	5	10	10	5	0	25	125
2	10	20	30	15	20	9	90
4	5	10	40	20	20	1	5
6	15	30	70	35	90	1	15
8	15	30	100	50	120	9	135
ΣΥΝΟΛΑ	50	100			250		370

B1. $f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100\% - 70\% = 30\%$

$$v = \frac{v_5}{f_5} = \frac{15}{0,3} = \frac{150}{3} = 50$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{5}{50} = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ ή } 10\%$$

$$v_2 = f_2 \cdot v = 0,20 \cdot 50 = 10$$

$$v_3 = \frac{x_3 \cdot v_3}{x_3} = \frac{20}{4} = 5$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{5}{50} = 0,1 \text{ ή } 10\%$$

$$N_4 = N_5 - v_5 = 50 - 15 = 35$$

$$v_4 = N_4 - N_3 = 35 - 20 = 15$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 0,3$$

B2. $\bar{x} = \frac{250}{50} = 5.$

B3. Το πλήθος είναι 50 (άρτιος). Άρα υπάρχουν 2 μεσαίες παρατηρήσεις ($25^{\text{η}}$ και $26^{\text{η}}$). Από τη στήλη της αθροιστικής συχνότητας αυτές αντιστοιχούν στην τιμή

μεταβλητής x_4 . Άρα $\delta = \frac{6+6}{2} = 6.$

B4. $s^2 = \frac{370}{50} = \frac{740}{100} = 7,4.$

B5. $x' = \frac{250 + 50 \cdot 2}{50} = \frac{350}{50} = 7.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τους περιορισμούς των κλάδων της συνάρτησης $x \in (0, +\infty).$

Γ2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 6x - 8}{2 - \sqrt{x+2}} = \dots = \frac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$-x^2 + 6x - 8 = -(x-2)(x-4)$, αφού η εξίσωση $-x^2 + 6x - 8 = 0$ έχει ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 6x - 8}{2 - \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{(2 - \sqrt{x+2})(2 + \sqrt{x+2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{4 - (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{4 - x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{-(x-2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [(x-4)(2 + \sqrt{x+2})] = (2-4)(2 + \sqrt{4}) = (-2) \cdot 4 = -8$$

Γ3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\lambda \cdot \frac{x^2 + 4}{x + 2} \cdot e^{x-2} \right] = \lambda \cdot \frac{2^2 + 4}{2 + 2} \cdot e^0 = 2\lambda.$

Γ4. Για να υπάρχει το όριο στο $x = 2$ θα πρέπει να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$

Συνεπώς θα έχουμε $2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-8}{2} \Leftrightarrow \lambda = -4$

Γ5. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x=2$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$$

$$f(2) = \kappa^3$$

$$\text{Άρα } \kappa^3 = -8 \Leftrightarrow \kappa = -\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \kappa = -2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(1) = 0$

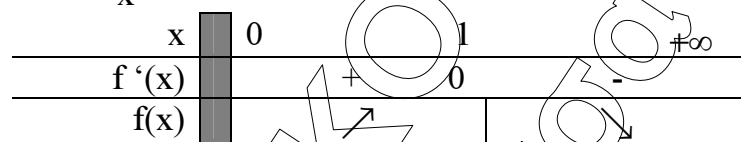
$$f'(x) = \frac{(\alpha + \ln x)' \cdot x^2 - (\alpha + \ln x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\alpha + \ln x) \cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{1 - \alpha - \ln x}{x^2}$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha - \ln 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Δ2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$$



T.M.

Η $f \uparrow$ στο $(0, 1]$ και η $f \downarrow$ στο $[1, +\infty)$

Δ3. Η f παρουσιάζει στο $x = 1$ T.M. (που είναι και Ολικό). Άρα από τον ορισμό του Τοπικού Μεγίστου ισχύει $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1 + \ln 1}{1} \Leftrightarrow f(x) \leq 1$.

Δ4. $E = \int_1^e |g(x)| dx$

$$g(x) \Leftrightarrow x \cdot f(x) - 1 \Leftrightarrow g(x) = x \cdot \frac{1 + \ln x}{x} - 1 \Leftrightarrow g(x) = 1 + \ln x - 1 \Leftrightarrow g(x) = \ln x$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1. \text{ Άρα στο } [1, e] \text{ η } g(x) > 0.$$

$$E = \int_1^e |g(x)| dx = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \cdot \ln x dx = \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx =$$

$$= [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx = e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= e \cdot 1 - 1 \cdot 0 - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = e - e + 1 = 1 \text{ τ.μ.}$$