ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράσταση μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:*

i) Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α έχει αντίστροφη, τότε $f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 2

ii) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

iii) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Μονάδες 2

iv) Μια συνεχής στο (α, β) συνάρτηση, παίρνει σε κάθε περίπτωση στο (α, β) μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 2

v) Αν f συνεχής συνάρτηση στο [α, β] και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z, z_1 και w με $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε ο

$z_1=\dfrac{1+(\beta-2)i}{\alpha+2-i}$ να είναι φανταστικός και $\left|(1-i)\,\mathrm{Im}\left(w-\dfrac{1}{2}i\right)\right|=\sqrt{2}\left|w+\dfrac{1}{2}i\right|$.

Β1. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία ε με εξίσωση $x-y+4=0$.

Μονάδες 6

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι η παραβολή με εξίσωση $x^2+2y=0$.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $|z-w|\geq\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$.

Μονάδες 5

Β3. **α)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του $\overline{w}$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 3

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από την ευθεία $x-y+4=0$ και την γραμμή C του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=1$, $g(1)=0$ και ικανοποιούν τις σχέσεις: $f'(x)-f(x)=e^x g'(x)-1$ και $2f(x)+x^2-2x\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x g(x)+1$.

Μονάδες 6

Γ2. **α)** Να υπολογίσετε το $g'(1)$.

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)g\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)\right]=0$.

Μονάδες 4

Γ3. Αν, επιπλέον $g(x)=(x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, από το σημείο Μ(1, λ) άγονται το πολύ τρεις εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με $h(x)=e^x(1-x)+1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\int_0^{g''(x)} 2t^2e^{t^2}dt < g''(x)\,e^{[g''(x)]^2}-g''(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και

$$g(2)=-2,\ \int_{-2}^{g(0)} e^{t^2}dt\cdot\int_{-2}^{g(1)} e^{t^2}dt<0\ .$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(0,\,1)$, τέτοιο, ώστε $g(\rho)=-2$ (μονάδες 5) και $g'(\rho)<0<g'(2)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to2^-} g\left(\dfrac{x-3}{g(x)+2}\right)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $g(1+x-x^3)=g(1)+g(x)-g(x^3)$, $x>0$.

Μονάδες 5

Ευχόμαστε Επιτυχία