ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη, σχολικό βιβλίο, σελ. 151

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 14

Α3. Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 65

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Επειδή οι κλάσεις είναι 5 και το εύρος είναι $20-10=10$, το πλάτος ισούται με $\frac{R}{k}=\frac{10}{5}=2$.

[Β΄ τρόπος: $20=10+5c \Leftrightarrow 5c=10 \Leftrightarrow c=2$ *]*

Για την κεντρική τιμή x_i της κλάσης $[a_i, b_i)$ ισχύει $x_i=\frac{a_i+b_i}{2}$.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\nu_1=6, N_2=18 \Leftrightarrow \nu_2=18-6=12$

$\nu_5=6, \nu_4+\nu_5=18 \Leftrightarrow \nu_4=12$

και άρα $\nu_3=60-(6+12+12+6)=24$.

Ισχύουν, επίσης $f_i\%=100 f_i=100\cdot\frac{\nu_i}{\nu}, i=1,\ldots,5$

$N_1=\nu_1, N_i=N_{i-1}+\nu_i, i=2,\ldots,5$ και

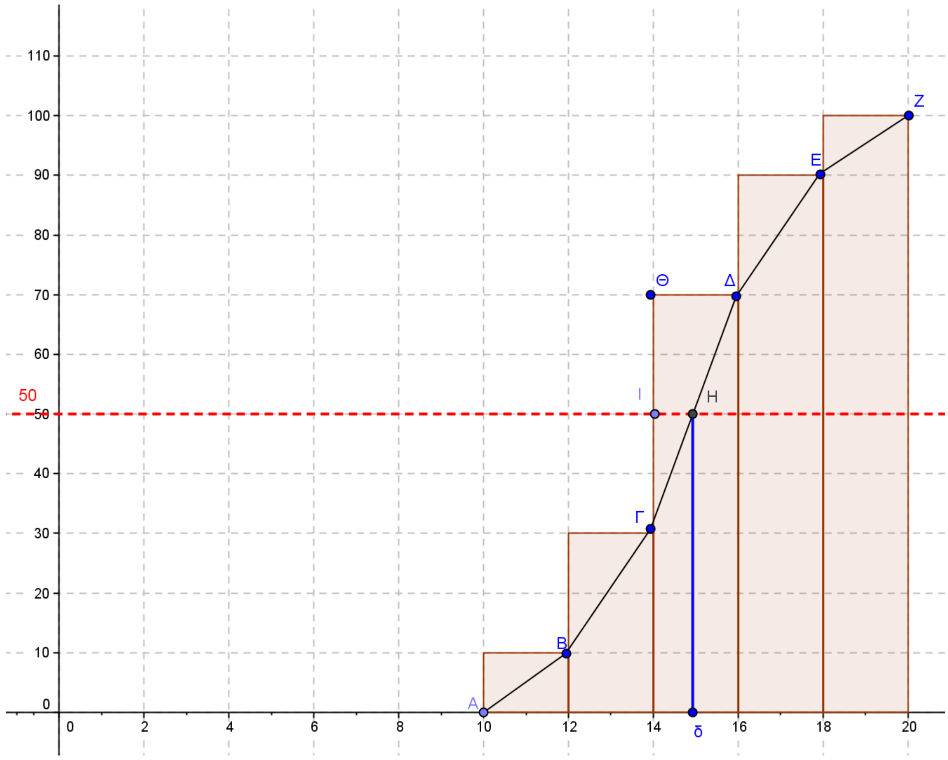
$F_1\%=f_1\%, F_i\%=F_{i-1}\%+f_i\%, i=2,\ldots,5$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική Συχνότητα $F_i\%$
[10, 12)	11	6	10	6	10
[12, 14)	13	12	20	18	30
[14, 16)	15	24	40	42	70
[16, 18)	17	12	20	54	90
[18, 20)	19	6	10	60	100
Σύνολο	-	60	100	-	-

B2. Για τη μέση τιμή έχουμε $\overline{x} = \dfrac{11\cdot 6+13\cdot 12+15\cdot 24+17\cdot 12+19\cdot 6}{60} = \dfrac{900}{60} = 15$.

Εύρεση της διαμέσου δ

Κάνουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων τοις εκατό, όπως φαίνεται παρακάτω,



Από την ομοιότητα των τριγώνων ΓΙΗ και ΓΘΔ έχουμε,

$$\frac{20}{40} = \frac{\delta - 14}{16-14} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\delta - 14}{2} \Leftrightarrow \delta = 15$$

(διαφορετικά βρίσκουμε την ευθεία ΓΔ, αφού γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ, στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην εξίσωσή της το σημείο (δ, 50) και βρίσκουμε το δ).

Β΄ τρόπος *(Προσοχή, δεν δίνετε συγκεκριμένα σε αυτό το υποερώτημα ότι οι παρατηρήσεις στα διαστήματα αυτά είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, άρα η λύση αυτή δεν είναι η ενδεδειγμένη)*

Η διάμεσος έχει την ιδιότητα : το 50% του δείγματος έχει τιμή μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν.

Αφού $50 = f_1\% + f_2\% + \dfrac{1}{2} f_3\%$ έχουμε ότι η διάμεσος θα είναι το μέσο της $[14,16)$ άρα $\delta = 15$.

Σημείωση: Διαπιστώνουμε ότι η μέση τιμή και η διάμεσος ταυτίζονται.

B3. Το 5% είναι το μισό του $f_5\%$, που αντιστοιχεί στο μέσο της $[18,20)$ άρα ο βαθμός είναι τουλάχιστον 19 για να πάρουν οι μαθητές έπαινο.

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. Έχουμε,

$$P(\Omega)=P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{5}=1$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha+\frac{\alpha}{5}=1\Leftrightarrow 10\alpha+\alpha=5\Leftrightarrow \alpha=\frac{5}{11}$$

Τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου είναι:

$$P(-1)=\frac{5}{22},P(0)=\frac{5}{11},P(1)=\frac{5}{22},P(2)=\frac{1}{11}.$$

Γ2. Ζητάμε το ενδεχόμενο $\Gamma=B-A\Rightarrow P(\Gamma)=P(B-A)$.

Όμως $\Gamma=\{-1,1\}$, συνεπώς

$$P(\Gamma)=P(-1)+P(1)=\frac{5}{11}.$$

(διαφορετικά με τους κανόνες λογισμού,

$$\mathrm{P}\ \ \Gamma\ \ =\mathrm{P}\ \ \mathrm{B}-\mathrm{A}\ \ =\mathrm{P}\ \ \mathrm{B}\ \ -\mathrm{P}\ \ \mathrm{B}\cap\mathrm{A}\ \ =\frac{6}{11}-\mathrm{P}\ \ 2\ \ =\frac{6}{11}-\frac{1}{11}=\frac{5}{11}\ \textit{).}$$

Επίσης ζητάμε το ενδεχόμενο $\Delta=A'\cup B'$.

Α΄ τρόπος (αναλυτικά)

Έχουμε, $\mathrm{A}'=\ \ -1,0,1\ \ ,\ \ \mathrm{B}'=\ \ 0\ \$, άρα $\Delta=\mathrm{A}'\bigcup\mathrm{B}'=\ \ -1,0,1\ \$, οπότε

$$\mathrm{P}\ \ \Delta\ \ =\mathrm{P}\ \ -1\ \ +\mathrm{P}\ \ 0\ \ +\mathrm{P}\ \ 1\ \ =1-\mathrm{P}\ \ 2\ \ =1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}.$$

Β΄ τρόπος *(με τύπους De Morgan. Προσοχή: Κανονικά χρειάζονται αποδείξεις, οπότε καλό είναι να τους αποφεύγετε όσο μπορείτε)*

$\Delta=A'\cup B'=(A\cap B)'$,οπότε $P(\Delta)=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)$

Όμως $A\cap B=\{2\}$, άρα $P(A\cap B)=P(2)=\frac{1}{11}$ οπότε $P(\Delta)=1-\frac{1}{11}\Leftrightarrow P(\Delta)=\frac{10}{11}$.

Γ τρόπος (τύποι λογισμού)

Έχουμε,

$$\mathrm{P}\ \ \mathrm{A}'\bigcup \mathrm{B}'\ = \mathrm{P}\ \ \mathrm{A}'\ + \mathrm{P}\ \ \mathrm{B}'\ - \mathrm{P}\ \ \mathrm{A}'\bigcap \mathrm{B}'$$

$$= 1 - \mathrm{P}\ \ \mathrm{A}\ + 1 - \mathrm{P}\ \ \mathrm{B}\ - \mathrm{P}\ \ 0$$

$$= 1 - \frac{1}{11} + 1 - \frac{6}{11} - \frac{5}{11} = \frac{10}{11}$$

Γ3. Η συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = x^2 + \kappa x + \frac{9}{4}$.

Θέλουμε βάσει του δοθέντος ενδεχομένου η συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή αρκεί: $f'(x) > 0$.

Βρίσκουμε την διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \kappa^2 - 9$$

εφόσον ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του πολυωνύμου είναι θετικός, αρκεί Δ < 0,

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow |\kappa| < 3, \kappa \in \Omega \text{ οπότε ισχύει.}$$

Άρα για $\kappa \in \Omega \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ δηλαδή το Ε είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

Β΄ τρόπος (με αντικαταστάσεις): Επειδή $\kappa \in \Omega$ αντικαθιστούμε (τέσσερις φορές) την τιμή του κ (= -1, 0,1, 2) στη συνάρτηση και εξετάζουμε αν η f είναι γνησίως αύξουσα…

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1. i) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E(x) = (A\Gamma\Delta Z) + (\Gamma B\Theta H) = x^2 + (100 - x)^2 = x^2 + x^2 - 200x + 10000$$

$$\Leftrightarrow E(x) = 2x^2 - 200x + 10000,\ x \in (0,100)$$

ii) Για κάθε $x \in (0,100)$ έχουμε $E'(x) = 4x - 200$.

Όμως,

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 50$$
$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 200 > 0 \Leftrightarrow x > 50$$
$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 200 < 0 \Leftrightarrow x < 50$$

που σημαίνει ότι η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,50] και γνησίως αύξουσα στο [50,100], συνεπώς στο $x = 50$ έχουμε την ελάχιστη τιμή για το εμβαδόν Ε.

Δ2. Είναι $\sum_{1}^{\nu} x_i = 50$ και επίσης $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} = 2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} x_i = 2\nu$.Συνεπώς $2\nu = 50 \Leftrightarrow \nu = 25$.

Δ3. Από τον τύπο που μας δίνει προκύπτει ότι

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i^2}{25} - \overline{x}^2 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i^2}{25} = s^2 + \overline{x}^2 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i^2}{25} = \frac{4}{100} + 4 = 4,04$$

Τα ζητούμενα εμβαδά προκύπτουν από $E(x_i) = x_i^2, i = 1,2,3,...25$ και η ζητούμενη μέση τιμή δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\sum_{i=1}^{25} x_i^2}{25} = 4,04m^2$$

Δ4. Για τις ευρεθείσες τιμές του i από τα προηγούμενα ερωτήματα οι μόνες που είναι πολλαπλάσια του 3 ή του 4 είναι οι αριθμοί 3,4,6,8,9,12,15,16,18,20,21,24 δηλαδή το ενδεχόμενο είναι

$$\Lambda = \{l_3, l_4, l_6, l_8, l_9, l_{12}, l_{15}, l_{16}, l_{18}, l_{20}, l_{21}, l_{24}\}$$

και εφόσον η εκλογή γίνεται τυχαία, τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\Lambda) = \frac{N(\Lambda)}{N(\Omega)} = \frac{12}{25} \ .$$